SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

IL PROBLEMA DI DIRICHLET NEGLI SPAZI ARMONICI

3 GIUGNO 1982

INTRODUZIONE

Il problema di Dirichlet classico, che consiste nel determinare una funzione armonica in un aperto Ω che assuma assegnati valori continui su $\partial\Omega$, non è, come noto, sempre risolubile. Si deve a Perron e Wiener un metodo che consente di associare ad ogni funzione $f \in C(\partial\Omega)$ una funzione H_f^Ω, armonica in Ω e tale che, se il problema di Dirichlet ha una soluzione u, allora $H_f^\Omega = u$. La questione della risolubilità del problema di Dirichlet viene quindi ricondotta allo studio del comportamento alla frontiera della funzione H_f^Ω: evidentemente, il problema è risolubile se, e solo se,

$$\lim_{x \to y} H_f^\Omega(x) = f(y), \qquad \forall\, y \in \partial\Omega.$$

Il metodo di Perron e Wiener permette quindi di separare il problema della "regolarità interna" da quello della "regolarità alla frontiera".

Esso si basa, essenzialmente, su tre principi:

i) il principio di minimo (massimo) per le funzioni armoniche;

ii) la risolubilità del problema di Dirichlet per le sfere (formula di Poisson);

iii) la completezza dello spazio delle funzioni armoniche, rispetto alla convergenza uniforme sui compatti.

Ora, questi principi sono verificati, oltre che dalla equazione di Laplace, anche da ampie classi di equazioni di tipo ellittico, parabolico ed ellittico-parabolico di ordine 2.

A partire dagli anni '50, ad opera soprattutto di Tautz, Doob, Brelot e Bauer, furono sviluppati sistemi assiomatici che, da un lato,

unificarono precedenti teorie relative a diverse classi di equazioni differenziali e, dall'altro, consentirono di estendere a queste molti dei risultati e dei metodi della teoria classica del potenziale, della quale, com'è ben noto, quello di Dirichlet è il più antico dei problemi.

In questo seminario esporrò dapprima (§ 1) il metodo di Perron e Wiener per operatori differenziali lineari in R^n, mettendo in evidenza i fatti essenziali sul quale si fonda. Successivamente (§ 2) introdurrò un sistema di assiomi nell'ambito del quale il metodo stesso si può formalizzare.

Un'ampia ed esauriente trattazione della teoria assiomatica del potenziale si trova, ad esempio, in [3].

1. IL METODO DI PERRON E WIENER PER LE EQUAZIONI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

Sia L un operatore alle derivate parziali, lineare e di ordine 2 su di un aperto X (limitato o no) di R^n.

Supponiamo che sia definita in qualche modo (classico, debole, ecc.) la *nozione* di *soluzione* dell'equazione $Lu = 0$ in Ω, qualunque sia l'aperto $\Omega \subseteq X$.

Non imporremo condizioni particolari sui coefficienti di L ma faremo ipotesi, direttamente, sulle soluzioni di $Lu = 0$.

Indichiamo con ${}^{L}H(\Omega)$ ($H(\Omega)$ se non vi è rischio di ambiguità) l'insieme delle soluzioni di $Lu = 0$ in Ω. Supponiamo, anzitutto, $H(\Omega) \subseteq C(\Omega,R)$ per ogni aperto $\Omega \subseteq X$. Supponiamo inoltre:

A.0) L'applicazione $\Omega \rightarrow H(\Omega)$ è un *fascio armonico* su X nel senso seguente:

i) $H(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $C(\Omega,R)$, per ogni aperto $\Omega \subseteq X$.

ii) $\forall \Omega_1, \Omega_2$ aperti di X, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, $\forall u \in H(\Omega_2) \Rightarrow u/\Omega_1 \in H(\Omega_1)$.

iii) Ω aperto di X, $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ con Ω_α aperto di X per ogni $\alpha \in A$, $u : \Omega \to R$ tale che $u/\Omega_\alpha \in H(\Omega_\alpha)$ per ogni $\alpha \in A \Rightarrow u \in H(\Omega)$.

Un aperto V di X, con $\overline{V} \subseteq X$, si dice *regolare per* L[1] se V è limitato e se il "problema di Dirichlet"

$$(1) \qquad \begin{cases} Lu = 0 \text{ in } V \\ u/\partial\Omega = f \end{cases}$$

è univocamente risolubile, nel senso che esiste una sola $u \in H(\Omega)$ tale che

$$\lim_{x \to y} u(x) = f(y) \qquad \forall\, y \in \partial\Omega ,$$

per ogni $f \in C(\partial\Omega)$; inoltre, se indichiamo con ${}^{L}H_f^V \equiv H_f^V$ la soluzione di (1), risulta $H_f^V \geq 0$ quando $f \geq 0$.

Osservazione 1. Supponiamo che per l'operatore L valga il seguente

Principio di minimo. Sia $u \in H(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq X$, Ω aperto e limitato. Se $\underline{\lim}_{x \to y}\, u(x) \geq 0 \quad \forall\, y \in \Omega$ allora $u \geq 0$ in Ω.

In questo caso, allora, (1) ha al più una soluzione e questa risulta ≥ 0 se $f \geq 0$.

Se l'operatore L è ellittico-parabolico, cioè se

$$(2) \qquad L = \sum_{i,j} a_{ij}\, \partial_i\, \partial_j + \sum_i a_i\, \partial_i + a$$

---

(1) ${}^{L}H$-regolare, qualora vi sia rischio di ambiguità.

con

$$(3)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \forall \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in R^n ,$$

il principio di minimo è verificato (almeno per le soluzioni classiche) se esiste $\omega \in C^{(2)}(X,R)$ tale che $\omega > 0$ in X e $L\omega < 0$ (principio di minimo di Picone).

Notiamo, d'altronde, che *la (3) non è necessaria* per la validità del principio di minimo, come prova il seguente

Esempio 1. Sia L_1 l'operatore (di Kannai) in R^2

$$L_1 = t\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Sia Ω un aperto limitato di R^2 e sia $u \in C^{(2)}(\Omega,R)$ tale che $Lu = 0$ in Ω e $\underline{\lim}_{\partial\Omega}\, u \geq 0$.

Supponiamo, per assurdo, $\inf u < 0$. Ma allora esiste $z_o = (x_o,t_o) \in \Omega$ tale che $u(z_o) = \min u < 0$.

Non può essere $t_o > 0$ perché allora, per il principio di minimo forte, essendo L parabolico "retrogrado" per $t > 0$, sarebbe $\underline{\lim}_{z \to z_1}\, u(z) = u(z_o) < 0$ per qualche $z_1 \in \partial\Omega$.

Analogamente si conclude che non può essere $t_o < 0$. Deve quindi essere $t_o = 0$.

Consideriamo ora $V : \Omega \to R$, $V(x,t) = u(x,t)\, e^{t}$. Risulta $LV = V$. Allora V non può assumere minimi negativi in $\Omega \cap \{t = 0\}$. Dunque $V \geq 0$, e quindi $u \geq 0$, in $\Omega \cap \{t = 0\}$. Ciò prova che non può essere neppure $t_o = 0$.

Introduciamo ora una ipotesi ulteriore.

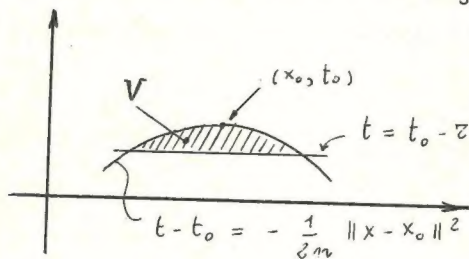
A.1) La famiglia $\mathcal{V} = \{V \subseteq X / V$ aperto regolare$\}$, costituisce una

base della topologia di X.

<u>Esempio 2</u>: Se $L_2 = \Delta$ e $X = R^n$ la condizione A.1) risulta verificata in quanto, come noto, il problema di Dirichlet classico è risolubile per le sfere, e L_2 verifica il principio di minimo.

<u>Esempio 3</u>. Se $L_3 = \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}$ e $X = R^n \times R$ la condizione A.1 è verificata in quanto anche L_3 verifica il principio di minimo e tutti gli aperti del tipo seguente

$$V = \{(x,t) \in R^n \times R \;/\; \frac{1}{2n}\|x-x_0\|^2 + (t-t_0) < 0,\ t > t_0 - r\}$$

($x_0 \in R^n$, $t_0 \in R$, $r > 0$) sono regolari per L_3.

Il metodo di Perron e Wiener si fonda sulla nozione di funzione superarmonica. Una funzione $u \in C(\Omega)$ è superarmonica, in senso classico, se risulta

$$u/V \geqq {}^{\Delta}H^{V}_{u/\partial V} \tag{4}$$

per ogni sfera $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$.

Questa nozione è assai facilmente generalizzabile al caso del fascio armonico ${}^{L}H$.

Introduciamo dapprima la nozione di *misura armonica* dovuta, nel caso del laplaciano, a Wiener.

Se V è un aperto ${}^{L}\mathcal{H}$-regolare di X e se $x \in V$, il funzionale

$$C(\partial V) \ni \phi \to {}^{L}H_{\phi}^{V}(x)$$

è lineare e positivo. Esiste allora una misura di Borel, μ_x^V, col supporto in ∂V, tale che

$${}^{L}H_{\phi}^{V}(x) = \int_{\partial V} u(\xi)\, d\mu_x^V(\xi)$$

μ_x^V *è la misura armonica relativa a* V *e a* x (per definizione).

<u>Osservazione 2</u>. Nel caso armonico classico ($L = \Delta$) se $V = S(x_o, r) = \{x \in R^n / \|x-x_o\| < r\}$, μ_x^V è la misura, assolutamente continua rispetto alla misura di superficie $d\sigma$, avente come densità il nucleo di Poisson:

$$d\mu_x^V(\xi) = \frac{r^2 - |x-\xi|^2}{n\, \omega_n\, r} \; \frac{d\sigma\ (\xi)}{|x-\xi|^n} \equiv P(x,\xi)\, d\sigma(\xi).$$

La (4) si scrive allora, equivalentemente, così:

$$(4) \qquad u(x) \geq \int_{\partial V} u\, d\mu_x^V , \qquad \forall\, x \in V$$

e per ogni sfera $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$.

In generale, una funzione $u \in C(\Omega)$ diremo che è ${}^{L}\mathcal{H}$*-superarmonica* (superarmonica se non vi è pericolo di ambiguità) se essa verifica la disuguaglianza integrale (4) per ogni aperto ${}^{L}\mathcal{H}$-regolare $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$. Indicheremo con ${}^{L}S(\Omega) \equiv S(\Omega)$ l'insieme delle funzioni ${}^{L}\mathcal{H}$-superarmoniche in Ω.

Osservazione 3. Se L è del tipo (2) e se esiste $\omega \in C^{(2)}(X,]0,+\infty[)$ tale che $L\omega < 0$, allora una funzione $u \in C^{(2)}(\Omega)$ è superarmonica se, e solo se, $Lu \leq 0$ in Ω.

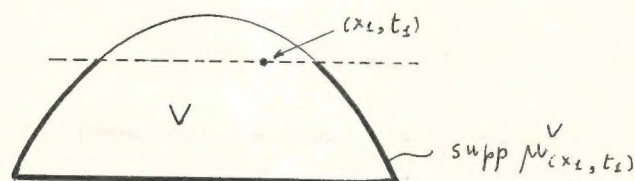
Una proprietà fondamentale delle funzioni superarmoniche è che *anch'esse verificano il principio di minimo*:

$$\Omega \text{ aperto lim. di } X,\ u \in S(\Omega),\ \underline{\lim}_{\partial\Omega}\, u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0.$$

Nel caso classico ($L = \Delta$) questo principio si dimostra in maniera elementare utilizzando il fatto che il supporto della misura armonica μ_x^V coincide con ∂V.

Questa proprietà delle misure armoniche sussiste, grosso modo, solo per gli operatori ellittici.

Se, ad esempio, $L = \Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}$ è l'operatore del calore in $R^n \times R$, se $V = \{(x,t) \in R^n \times R \,/\, \frac{1}{2n}\|x-x_0\|^2 + (t-t_0) < 0,\ t > t_0-r\}$ e se $(x_1,t_1) \in V$, una semplice applicazione del principio di minimo, porta a riconoscere che

$$\text{supp } \mu^V_{(x_1,t_1)} = \{(x,t) \in \partial V / t \leq t_1\}.$$

Si deve a H. Bauer ([1]) una dimostrazione del principio di minimo per le funzioni superarmoniche che si fonda soltanto sulle assunzioni A.0), A.1) e sulla seguente:

A.2) i) esiste $h \in H(X)$, $h(x) > 0$ $\forall x \in X$;

ii) $\frac{1}{h} S(X)$ separa i punti di X, cioè:

$$\forall\, x,y \in X, \quad x \neq y, \quad \exists\, u \in S(X): \quad \frac{u(x)}{h(x)} \neq \frac{u(y)}{h(y)} .$$

Teorema 1. Se valgono A.0), A.1) e A.2) allora le funzioni superarmoniche verificano il principio di minimo.

Dimostrazione. Sia Ω un aperto limitato con la chiusura contenuta in X. Occorre provare che per ogni $u \in S(\Omega)$ tale che $\underline{\lim}_{\partial\Omega}\, u \geq 0$, risulta $u \geq 0$. Supponiamo, per semplicità, che valga A.2) i) con $h = 1$. Sia dunque $u \in S(\Omega)$ tale che $\underline{\lim}_{\partial\Omega}\, u \geq 0$ e poniamo

$$K(u) = \{x \quad \overline{\Omega} \;/\; \underline{\lim}_{y \to x}\, u(y) = \inf_{\Omega} u\}$$

Se $K(u) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ allora $\inf u \geq 0$ e il Teorema è provato. Supponiamo pertanto $K(u) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Ne viene che $K(u)$ è un compatto contenuto in Ω. Risulta poi verificata, per $K = K(u)$, l'affermazione seguente:

$$(5) \qquad y \in K,\; V \in V,\; \overline{V} \subseteq \Omega,\; V \ni y \;\Rightarrow\; \operatorname{supp} \mu_x^V \subseteq K$$

Infatti, osservato che $\mu_x^V(\partial V) = 1$ per ogni misura armonica $\mu_x^V (1 \in H(X))$, si ha

$$u(y) = u(y)\, \mu_x^V(\partial V) \leq \int_{\partial V} u\, d\, \mu_y^V \leq u(y)$$

e, quindi, $u = u(y)$ μ_x^V - q.d.; in altri termini $\mu_x^V(\overline{\Omega} \setminus K) = 0$.

Ora, una semplice applicazione del lemma di Zorn prova che nella famiglia K di tutti i compatti $K \subseteq K(u)$ per i quali vale la (5) esiste

un elemento minimale (rispetto all'inclusione) K_o.

Se K_o non si riduce ad un solo punto, per la A.2)-ii) esiste una funzione $u_o \in \mathcal{S}(X)$ tale che $K_1 = \{x \in K(u)/u_o(x) = \min_{k(u)} u_o\} \subsetneq K_o$. Ma ciò è assurdo perché $K_1 \in \mathcal{K}$. Allora $K_o = \{x_o\}$ per un $x_o \in \Omega$. Poiché $K_o \in \mathcal{K}$ dovrà essere supp $\mu_{x_o}^V \subseteq \{x_o\}$ per ogni $V \in \mathcal{V}$, $x_o \in V$, $\overline{V} \subseteq \Omega$. Questo è assurdo perché supp $\mu_{x_o}^V \subseteq \partial V$.

Se Ω è un aperto limitato con la chiusura contenuta in X e se $f \in C(\partial\Omega)$, poniamo

$$^{L}\overline{H}_f^{\Omega} \equiv \overline{H}_f^{\Omega} = \inf \overline{\mathcal{U}}_f^{\Omega} \equiv \inf {}^{L}\overline{\mathcal{U}}_f^{\Omega}$$

dove

$$\overline{\mathcal{U}}_f^{\Omega} = \{u \in \mathcal{S}(\Omega) \ / \ \underline{\lim}_{x \to y} u(x) \geq f(x) \ \forall y \in \partial\Omega\}.$$

Se il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } \Omega \\ u/\partial\Omega = f \end{cases}$$

ha una soluzione u_o, allora $u_o \in \overline{\mathcal{U}}_f^{\Omega}$ e, come conseguenza del principio di minimo, $u \geq u_o$ per ogni $u \in \overline{\mathcal{U}}_f^{\Omega}$; pertanto $u_o = \min \overline{\mathcal{U}}_f^{\Omega} = \overline{H}_f^{\Omega}$.

Nel caso di $L = \Delta$ *Perron mostrò che, in ogni caso, risulta* $\overline{H}_f^{\Omega} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Il punto di partenza per arrivare a questo risultato è la costruzione seguente, già utilizzata da Schwarz e da Poincaré prima di Perron.

Se $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ e $V \in \mathcal{V}$, $\overline{V} \subseteq \Omega$, anche la funzione

$$u_V = \begin{cases} u \text{ in } \Omega \setminus V \\ H_{u/\partial V}^V \text{ in } V \end{cases}$$

è superarmonica in Ω e $u \geq u_V$. Ciò è conseguenza del principio di minimo.

Inoltre, ovviamente, se $u \in \overline{U}_f^\Omega$, anche $u_V \in \overline{U}_f^\Omega$. Ora, per provare che $\overline{H}_f^\Omega \in H(\Omega)$, basterà provare che essa è armonica in $V(\in H(V))$ per ogni aperto regolare V con $\overline{V} \subseteq \Omega$. D'altra parte, per quanto detto sopra,

$$\overline{H}_f^\Omega = \inf_{u \in \overline{U}_f} u \geq \inf_{u \in \overline{U}_f} u_V \geq \inf_{v \in \overline{U}_f} v = \overline{H}_f^\Omega .$$

Allora, osservato che $u_V \in H(V)$, $\overline{H}_f^\Omega/V$ è *inviluppo inferiore di una famiglia di funzioni armoniche in* V.

Tale *famiglia è filtrante* a sinistra; infatti:

$$u',u'' \in \overline{U}_f^\Omega \Rightarrow u = \min(u',u'') \in \overline{U}_f^\Omega \text{ e } u_V \leq \min(u'_V,u''_V).$$

Osserviamo infine che, per la A.2) i), $\overline{H}_f^\Omega$ è *inferiormente limitata*. In particolare, allora, le funzioni di $\overline{U}_f^\Omega$ sono inferiormente equilimitate su ogni compatto di Ω.

Pertanto risulterebbe $\overline{H}_f^\Omega/V \in H(V)$ se valesse la seguente

<u>Proposizione 1</u>. Se O è un aperto di X e se F è una famiglia filtrante a sinistra di funzioni armoniche ($\in H(O)$), inferiormente equilimitate su ogni compatto di O, allora $\inf F \in H(O)$.

La A.1) consente di provare che la Proposizione 1 è conseguenza della seguente

<u>Proposizione 2</u>. Se F è una famiglia filtrante a sinistra di funzioni armoniche in un aperto O di X, inferiormente equilimitate su ogni compatto di O, allora F converge uniformemente su ogni compatto di O.

Proviamo che <u>A.1)</u> + <u>Prop 2</u> $\Rightarrow$ <u>Prop 1</u>.

Posto $u = \inf F$ risulta $u \in C(O)$ per la convergenza uniforme di F ad u su

di ogni compatto di $\mathcal{O}$.

Inoltre, per ogni misura armonica μ_x^V, con $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \mathcal{O}$, risulta

$$u(x) = (\inf_{v \in F} v)(x) = \inf_{v \in F} \int v \, d\mu_x^V =$$

$$= \int \inf_{v \in F} v \, d\mu_x^V = \int u \, d\mu_x^V$$

Ciò prova che $u/V = H^V_{u/\partial V}$; quindi $V \in H(V)$ per ogni $V \in \mathcal{V}$, $\overline{V} \subseteq \Omega$. In definitiva ($A_o$-iii)) $u \in H(\mathcal{O})$.

Ricordiamo ora il seguente Lemma di Cornea ([2]).

Lemma. Sia Y uno spazio topologico compatto e sia $F \subseteq C(Y,R)$, F filtrante a sinistra. Supponiamo che per ogni successione (f_n) in F, $f_n \downarrow$, risulti $\inf f_n \in C(Y,R)$. Allora F converge uniformemente a $\inf F$.

Allora la Proposizione 2 è conseguenza della seguente affermazione

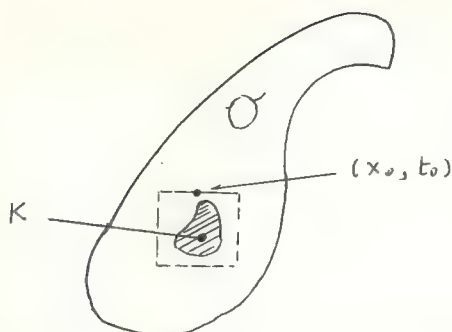
A.3) Ogni successione monotona di funzioni armoniche converge uniformemente su ogni compatto se è localmente equilimitata.

Nel caso armonico classico ($L = \Delta$) A.3) deriva dalla seguente *disuguaglianza di Harnack*:

$$\text{(H)} \qquad \sup_K v \leq C(x_o,K)\, v(x_o),$$

valida per ogni $v \in H(\mathcal{O})$, $v \geq 0$, e per ogni x_o e K (compatto) contenuti nella medesima componente connessa di $\mathcal{O}$.

La disuguaglianza (H) vale anche per le soluzioni dell'equazione del calore (Pini [9], Hadamord [5]) purché il compatto K sia contenuto in un cilindro $Q = \{(x,t) \in R^n \times R \;/\; \|x-x_o\|^2 < r^2,\ t_o-r^2 \leq t < t_o\}$ a sua

volta contenuto in Ω.

Ciò basta a garantire che anche il fascio armonico ${}^{(\Delta-\partial/\partial t)}H$ verifica A.3).

Una disuguaglianza di tipo Harnack, analoga a quella di Pini-Hadamard per l'equazione del calore, vale anche per le soluzioni di certe equazioni ellittico-paraboliche, ma risulta sempre molto difficile mostrarne la validità.

D'altra parte, per verificare A.3) non è essenziale disporre della disuguaglianza (H).

Infatti, se si suppone che le funzioni H-armoniche siano, ad esempio, hölderiane, allora H verifica A.3).

Vale infatti il seguente

<u>Teorema (Bony)</u>. Se le funzioni H-armoniche sono localmente hölderiane di esponente $\alpha > 0$, allora H verifica A.3) se verifica A.1).

<u>Dimostrazione</u>. Sia Ω un aperto di X e sia (K_n) una successione di compatti che invade Ω. per ogni $n \in N$ e per ogni $u \in H(\Omega)$ poniamo

$$p_n(u) = \sup_{K_n} |u|, \quad q_n(u) = \sup_{K_n} |u| + \sup_{x,y \in K_n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Consideriamo su $H(\Omega)$ le topologie τ e τ' generate, rispettivamente, da (p_n) e da (q_n). Basta provare che $\tau = \tau'$.

Ora, per la A.1), gli spazi $(H(\Omega),\tau)$ e $(H(\Omega),\tau')$ sono completi (la convergenza uniforme sui compatti conserva la H-armonicità). Inoltre l'applicazione identica $i : H(\Omega)_\tau \to H(\Omega)_{\tau'}$, ha il grafico chiuso. Allora i è continua e, quindi, $\tau = \tau'$.

Diamo ora la definizione di sottosoluzione del problema di Dirichlet.

Se Ω è un aperto limitato con la chiusura contenuta in X e se $f \in C(\partial\Omega)$, si pone

$$ {}^L\underline{H}_f^\Omega \equiv \underline{H}_f^\Omega = \inf \underline{U}_f^\Omega \equiv \inf {}^L\underline{U}_f^\Omega $$

dove

$$ \underline{U}_f^\Omega = \{u \in -S(\Omega) \ / \ \overline{\lim_{x \to y}}\ u(x) \geq f(y) \quad \forall y \in \partial\Omega\} \ . $$

E' immediato riconoscere, utilizzando il principio di minimo, che è $\underline{H}_f^\Omega \leq \overline{H}_f^\Omega$.

Una funzione si dice *risolutiva* se $\underline{H}_f^\Omega = \overline{H}_f^\Omega$. Nel caso armonico classico Wiener provò che ogni funzione continua è risolutiva. Questo risultato vale anche per ogni fascio armonico verificante A.1), A.2) e A.3).

Teorema (Wiener). Se il fascio armonico H verifica A.1), A.2) e A.3), allora ogni funzione continua è risolutiva.

Dimostrazione. Indichiamo con L l'insieme delle funzioni risolutive. E' immediato riconoscere che L è uno spazio vettoriale. Risulta poi:

a) $F \in S(X) \Rightarrow F/\partial\Omega \in L$.

Infatti, posto per semplicità $f = F/\partial\Omega$, si ha $F/\Omega \in \overline{U}_f^\Omega$ e, quindi, $\overline{H}_f^\Omega \leq F/\Omega$. Dunque $\overline{H}_f^\Omega \in \overline{U}_f^\Omega$ (ricordiamo che $\overline{H}_f^\Omega$ è armonica) e, quindi, $\overline{H}_f^\Omega \leq \underline{H}_f^\Omega$.

b) $L = \overline{L}^{unif}$. Per semplicità supponiamo $h = 1$ in A.2). Sia (f_n) una successione in L tale che $f_n \underset{\partial\Omega}{\rightrightarrows} f$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in N$ tale che

$$f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon \qquad \forall n \geq \overline{n}.$$

Allora, per ogni $n \geq \overline{n}$,

$$H_{f_n} + \varepsilon = \overline{H}_{f_n + \varepsilon} \geq \overline{H}_f \geq \underline{H}_f \geq \underline{H}_{f_n - \varepsilon} = H_{f_n} - \varepsilon$$

e, quindi, $\overline{H}_f - \underline{H}_f \leq 0$, a causa dell'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

c) Posto $A = \{(F-G)/\partial\Omega / F,G \in S(X)\}$, proviamo che è $\overline{A}^{unif} = C(\partial\Omega)$.

Ciò segue dal Teorema di Stone-Weierstrass in quanto:

i) A è un sottospazio vettoriale di $C(\partial\Omega)$.

ii) $1 \in A$ (supponendo, ancora per semplicità, $h = 1$ nella A.2)).

iii) A separa i punti di $\partial\Omega$ (Cfr. A.2)).

iv) $f \in A \Rightarrow f^+ = \max(o,f) \in A$. Infatti, se $f = (F-G)/\Omega$ con F e $G \in S(X)$, si ha, in Ω,
$f^+ = (F-G)^+ = \max(F-G,0) = F-\min(F,G)$;
quindi $f^+ \in A$.

Da a), b) e c) segue subito che $L = \overline{L} = C(\partial\Omega)$.

Se $f \in C(\partial\Omega)$ si indica H_f^Ω la funzione $\overline{H}_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega$. H_f^Ω si chiama soluzione generalizzata, nel senso di Perron e Wiener, del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } \Omega \\ u/\partial\Omega = f \end{cases}$$

Come abbiamo già osservato, se esiste una funzione $u \in C(\overline{\Omega})$ tale che $u/\partial\Omega = f$ e $Lu = 0$ in Ω, allora $u = H_f^\Omega$. Ovviamente una funzione siffatta esiste se, e solo se,

$$(6) \qquad \lim_{x \to y} H_f^\Omega(x) = f(y)$$

per ogni $y \in \partial\Omega$. Ma questo, come noto, non succede sempre; un punto $y \in \partial\Omega$ si dice *regolare per* Ω (L-regolare per Ω) se vale la (6) per ogni $f \in C(\partial\Omega)$.

Il metodo di Perron e Wiener riduce il primo problema di valori al contorno, allo studio della regolarità dei punti di frontiera. Questo può ritenersi esaurito nel caso di operatori ellittici e di operatori parabolici (Cfr. [10], [8], [6], [7], [4]) ma resta tutt'ora aperto per ampie classi di operatori ellittico-parabolici.

2. IL METODO DI PERRON E WIENER NEGLI SPAZI ARMONICI

Sia X uno spazio topologico localmente compatto e con una base numerabile e sia H un *fascio armonico* su X, una applicazione, cioè,

$$H : \Omega \text{ (aperto)} \to H(\Omega)$$

con le proprietà i), ii) ed iii) di pag. 3.

Si chiama *problema di Dirichlet* relativo ad H il problema

$$(7) \qquad \begin{cases} u \in H(\Omega) \\ u/\partial\Omega = f \end{cases}$$

Un *aperto* V relativamente compatto, con $\partial V \neq \emptyset$, si dice *regolare* se il problema di Dirichlet ad esso relativo ha una sola soluzione H_f^V tale che $H_f^V \geq 0 \quad f \geq 0$.

Allora, se V è un aperto regolare e se $x \in V$, il funzionale

$$C(\partial\Omega) \ni f \to H_f^V(x) \in R$$

è *lineare e non negativo*. Esiste quindi una misura $\mu_x^V \geq 0$, chiamata *misura armonica* relativa ad x e a V, tale che

$$H_f^V(x) = \int_{\partial V} f \, d\, \mu_x^V .$$

Una funzione $u : \Omega \to R \cup \{+\infty\}$ si dice *iperarmonica* in Ω (aperto di X) se:

i) u è inferiormente semicontinua

ii) $u(x) \geq \int_{\partial V} u \, d\, \mu_x^V$ per ogni aperto regolare V con $\overline{V} \subseteq \Omega$ e per ogni $x \in V$.

Indichiamo con $H^*(\Omega)$ *l'insieme delle funzioni iperarmoniche su* Ω.

Una funzione $u \in H^*(\Omega)$ si dirà *superarmonica* se la funzione $V \ni u \to \int_{\partial V} u \, d\, \mu_x^V$ è armonica in V per ogni aperto regolare V con $\overline{V} \subseteq \Omega$.

Con $S(\Omega)$ indichiamo l'insieme delle funzioni superarmoniche su Ω.

Si noti che $H^*(\Omega) \cap C(\Omega) = S(\Omega) \cap C(\Omega)$. Diremo che (X,H) è uno spazio armonico se risultano verificati i seguenti assiomi:

A.1) (*Assioma di regolarità*). La famiglia degli aperti regolari costituisce una base V per la topologia di X.

A.2) (*Assioma di separazione*).

i) Per ogni aperto relativamente compatto Ω esiste una funzione $h \in H(\Omega)$ tale che $h > 0$;

ii) $\mathcal{S}(X)$ separa fortemente i punti di X, cioè:

$$\forall x,y \in X, \ \exists u,v \in \mathcal{S}(X): u(x)\, v(y) \neq u(y)\, v(x).$$

A.3) (*Assioma di convergenza*). Se (u_n) è una successione in $H(\Omega)$, se $u_n \uparrow u$ e se u è limitata su ogni compatto di Ω, allora $u \in H(\Omega)$.

Osservazione 4. Nel precedente paragrafo avevamo assunto come "assioma" di convergenza il seguente

A.3') Se (u_n) è una successione in $H(\Omega)$, se $u_n \uparrow u$ e se u è limitata su ogni compatto di Ω, allora $u_n \underset{K}{\rightrightarrows} u$ per ogni compatto $K \subseteq \Omega$.

Ora è facile vedere che (A.1) + (A.3) $\Rightarrow$ (A.1) + (A.3').

Osservazione 5. Nell'*assiomatica di Brelot* si assume, al posto di (A.3), il seguente

$(A.3)_e$ Se (u_n) è una successione in $H(\Omega)$, se $u_n \uparrow u$, se Ω è connesso e se esiste $x_o \in \Omega$ tale che $u(x_o) < +\infty$, allora $u \in H(\Omega)$.

Chiaramente questo assioma è ispirato alla disuguaglianza di Harnack classica; le equazioni alle quali è applicabile la teoria di Brelot sono, essenzialmente, quelle di tipo ellittico (di ordine 2).

Osservazione 6. H. Bauer ha sviluppato una teoria assiomatica nella quale l'assioma (A.3) è sostituito dal seguente

$(A.3)_p$ Sia (u_n) una successione in $H(\Omega)$ tale che $u_n \uparrow u$. Allora, se $\{x \in \Omega / u(x) < +\infty\}$ è denso in Ω, $u \in H(\Omega)$.

La teoria fondata su (A.1), (A.2) e $(A.3)_p$ si applica alle equa

zioni paraboliche, di tipo anche degenere.

Da (A.1), esattamente come nel § 1, si deduce il seguente

Principio di minimo. Sia $u \in H^*(\Omega)$ dove Ω è un aperto relativamente compatto di X. Se $\underline{\lim}_{\partial\Omega} u \geq 0$ allora $u \geq 0$ in Ω.

Se Ω è un aperto di X e se $V \in V$, $\overline{V} \in \Omega$, per ogni $u \in H^*(\Omega)$ poniamo

$$u_V(x) = \begin{cases} u(x), & x \notin \overline{V} \\ u \, d\mu_x^V, & x \in V \\ \underline{\lim}_{\partial V \not\ni y \to x} u_V(y), & x \in \partial V \end{cases}$$

Dal principio di minimo segue allora che anche u_V è *iperarmonica in* Ω. Se, inoltre, $u \in S(\Omega)$, allora u_V è *armonica in* V.

Sia ora Ω un aperto relativamente compatto di X e sia $f : X \to R$ (non necessariamente continua!).

Come nel § 1 introduciamo l'insieme delle soprafunzioni e quello delle sottofunzioni:

$$\overline{U}_f^\Omega = \{u \in H^*(\Omega) \;/\; \underline{\lim}_{\partial\Omega} u \geq f, \quad \inf u > -\infty\},$$

$$\underline{U}_f^\Omega = \{u \in -H^*(\Omega) \;/\; \overline{\lim}_{\partial\Omega} u \leq f, \; \sup u < +\infty\};$$

definiamo poi

$$\overline{U}_f^\Omega = \inf \overline{U}_f^\Omega \quad \text{e} \quad \underline{H}_f^\Omega = \sup \overline{U}_f^\Omega$$

Si dice che f è *risolutiva* se:

i) $\overline{H}_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega \; (\equiv H_f^\Omega)$

ii) $H_f^\Omega \quad H(\Omega)$.

Esattamente come nel § 1 si prova che *ogni funzione continua è risolutiva.*

Allora l'applicazione

$$C(\partial\Omega) \ni f \to H_f^{\Omega}(x) \in R$$

è lineare e positiva (per il principio di minimo). Esiste quindi una sola misura $\mu_x^{\Omega} \geq 0$ tale che

$$H_f^{\Omega}(x) = \int_{\partial\Omega} f \, d\, \mu_x^{\Omega} .$$

Possiamo ora formulare il seguente Teorema di risolutività che, nel caso armonico classico, si deve a Brelot.

Teorema (di risolutività). Una funzione $f : \partial\Omega \to R$ è risolutiva se, e solo se, risulta μ_x^{Ω}-integrale $\forall\, x \in \Omega$ e se la funzione $x \to \int_{\partial\Omega} f \, d\, \mu_x^{\Omega}$ è armonica in Ω.

La dimostrazione di questo Teorema si può trovare in [3], Teorema 1.2.1. e Corollario 2.4.1.

Osservazione 7. Se f è inferiormente semicontinua esiste una successione (ϕ_n) di funzioni continue (su $\partial\Omega$) tali che $\phi_n \uparrow f$. Allora la funzione

$$x \to \int_{\partial\Omega} f \, d\, \mu_x^{\Omega} = \sup_n \int_{\partial\Omega} \phi_n \, d\, \mu_x^{\Omega} = \sup_n \, H_{\phi}^{\Omega}(x)$$

è inviluppo superiore di una successione monotona crescente di funzioni armoniche in Ω.

Se, poi, f è μ_x^{Ω}-integrabile $\forall\, x \in \Omega$, allora $\int_{\partial\Omega} f \, d\, \mu_x^{\Omega} \in R$

$\forall\, x \in \Omega$. Pertanto, se $(X,\mathcal{H})$ *verifica l'assioma* $(A.3)_p$, $x \to \int f\, d\, \mu_x^\Omega$ è armonica in Ω.

Ne viene, in generale, che $x \to \int f\, d\, \mu_x^\Omega$ è armonica in Ω se f è μ_x^Ω-integrabile $\forall x \in \Omega$.

Più in particolare, se $(X,\mathcal{H})$ *è uno spazio di Brelot*, se verifica cioè $(A.3)_e$, e se Ω è connesso, allora, fissato, ad arbitrio, $x_o \in \Omega$ si ha:

f è risolutiva $\Leftrightarrow$ f è $\mu_{x_o}^\Omega$- integrabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAUER: CRAS Paris 250 (1960).

[2] CORNEA: Lectures Notes in Math., Springer (1968).

[3] COSTANTINESCU-CORNEA: Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer Verlag, Berlin (1972).

[4] EVANS-GARIEPY: Preprint (1981).

[5] HADAMARD: Rend. Circ. Mat. Palermo, 3 (1954).

[6] LANDIS: DAN. SSSR. 185 (1969).

[7] LANCONELLI: Ann. Mat. pura ed Appl. 106 (1975).

[8] LITTMAN-STAMPACCHIA-WEINBERGER: Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 17 (1963).

[9] PINI: Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 23 (1954).

[10] WIENER: J. of Math. and Physics, MIT, 3 (1924).